# 第 33 講　微分法(2)

**例題 33 － 1**

次の関数の増減を調べ，グラフをかけ．また，極値を求めよ．

(1)　$y=x^3-3x+1$

(2)　$y=-x^3+6x^2-12x+7$

(3)　$y=x^3+3x^2+4x+2$

**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 33 ー 1**

次の関数の増減を調べ，グラフをかけ．また，極値を求めよ．

(1)　$y=-2x^3+3x^2-1$　　(2)　$y=x^3+3x^2+3x$

(3)　$y=-x^3-x-\dfrac{1}{3}$


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 33 － 2**

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $x=-1$ で極大値をとり，$x=3$ で極小値 $-28$ をとるように，定数 $a$，$b$，$c$ の値を定めよ．また，極大値を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 33 ー 2**

関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極大値 6 をとり，$x=2$ で極小値 5 をとるように，定数 $a$，$b$，$c$，$d$ の値を定めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 33 ー 3**

(1)　関数 $f(x)=x^3-6x^2+6ax$ が極値をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

(2)　関数 $f(x)=x^3+ax^2+3(a-2)x+7$ が極値をもたないとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 33 − 3**

(1)　関数 $f(x)=x^3-3ax^2+ax+2$ が極値をもつような定数 $a$ の値の範囲を求めよ.

(2)　関数 $f(x)=-x^3-ax^2-2x-3$ が単調に減少するような定数 $a$ の値の範囲を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 33 − 4**

関数 $y=x^3-6x^2+9x+5$ の区間 $-1\leqq x\leqq 4$ における最大値と最小値を求めよ.

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 33 ー 4**

関数 $y=-x^3+6x^2-9x$ の区間 $-1 \leqq x \leqq 2$ における最大値と最小値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第33講　微分法(2)

(1)　関数 $y=-x^3+6x^2-9x+2$ は $x=$ ア のとき極小値 $-$ イ，$x=$ ウ のとき極大値 エ をとる．

(2)　関数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+2$ が $x=1$ で極値 1 をとるとき，$b=-$ オ，$c=-$ カ である．

(3)　関数 $f(x)=x^3-3ax^2+3ax+1$ が単調に増加するような定数 $a$ の値の範囲は キ $\leqq a \leqq$ ク である．

(4)　関数 $f(x)=x^3-3x^2+4$ の区間 $-2\leqq x\leqq 2$ における最大値は ケ，最小値は $-$ コサ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第33講　微分法(2)

**例題33－1**

次の関数の増減を調べ，グラフをかけ．また，極値を求めよ．

(1)　$y=x^3-3x+1$　　(2)　$y=-x^3+6x^2-12x+7$

(3)　$y=x^3+3x^2+4x+2$

それぞれのグラフは下図.

(1)　$y=x^3-3x+1$　より

$y'=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

$x=-1,\ 1$ のとき　$y'=0$　　よって増減表は右図.

**$x=-1$ で極大値 3**

**$x=1$ で極小値 $-1$ をとる.**

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-1$ | ↗ |

(2)　$y=-x^3+6x^2-12x+7$　より

$y'=-3x^2+12x-12=-3(x^2-4x+4)=-3(x-2)^2$

$x=2$ のとき　$y'=0$　　よって増減表は右図.

よって常に $y'\leqq 0$ より，単調に減少し，**極値はない.**

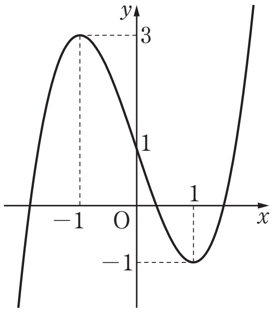
| $x$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↘ | $-1$ | ↘ |

(3)　$y=x^3+3x^2+4x+2$　より

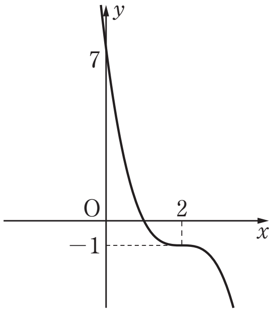
$y'=3x^2+6x+4=3(x+1)^2+1>0$

よって常に $y'>0$ より，単調に増加し，**極値はない.**

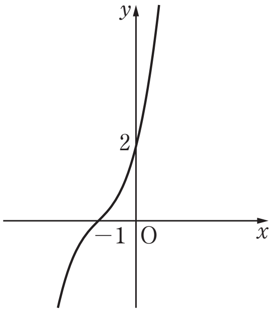
(1)




(2)




(3)




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 33 － 1**

次の関数の増減を調べ，グラフをかけ．また，極値を求めよ．

(1)　$y=-2x^3+3x^2-1$　　(2)　$y=x^3+3x^2+3x$

(3)　$y=-x^3-x-\dfrac{1}{3}$

それぞれのグラフは下図.

(1)　$y=-2x^3+3x^2-1$　より

$y'=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$x=0,\ 1$ のとき　$y'=0$　　よって増減表は右図.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↘ |

**$x=0$ で極小値 $-1$**

**$x=1$ で極大値 $0$ をとる.**

(2)　$y=x^3+3x^2+3x$　より

$y'=3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2$

$x=-1$ のとき　$y'=0$　　よって増減表は右図.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $-1$ | ↗ |

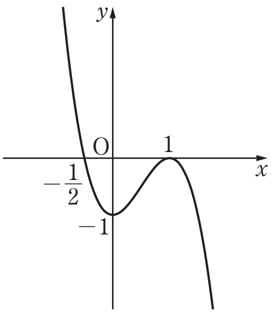
よって常に $y'\geqq 0$ より，単調に増加し，**極値はない.**

(3)　$y=-x^3-x-\dfrac{1}{3}$　より

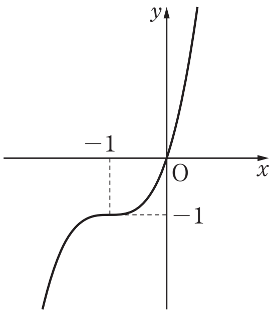
$y'=-3x^2-1<0$

よって常に $y'<0$ より，単調に減少し，**極値はない.**

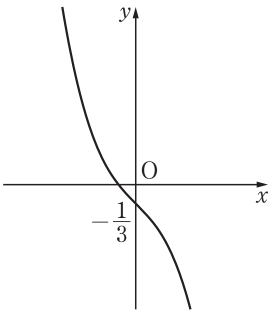
(1)




(2)




(3)




ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 33 ー 2**

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $x=-1$ で極大値をとり，$x=3$ で極小値 $-28$ をとるように，定数 $a$，$b$，$c$ の値を定めよ．また，極大値を求めよ．

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$　より　$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=-1$ で極大値をとるとき　$f'(-1)=0$

　よって　$3-2a+b=0$　……①

$x=3$ で極小値 $-28$ をとるとき　$f'(3)=0$，$f(3)=-28$

　よって　$27+6a+b=0$　……②　　$27+9a+3b+c=-28$　……③

①，②より　$a=-3$，$b=-9$　　これと③より　$c=-1$

このとき　$f(x)=x^3-3x^2-9x-1$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

増減表は右図.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-28$ | ↗ |

よって確かに $f(x)$ は $x=-1$ で極大値をとり，$x=3$ で極小値 $-28$ をとり，条件を満たす.

したがって　$\boldsymbol{a=-3}$，$\boldsymbol{b=-9}$，$\boldsymbol{c=-1}$　　**極大値は 4**

**類題 33 ー 2**

関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極大値 6 をとり，$x=2$ で極小値 5 をとるように，定数 $a$，$b$，$c$，$d$ の値を定めよ.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$　より　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=1$ で極大値 6 をとるとき　$f'(1)=0$，$f(1)=6$

　よって　$3a+2b+c=0$　……①，$a+b+c+d=6$　……②

$x=2$ で極小値 5 をとるとき　$f'(2)=0$，$f(2)=5$

　よって　$12a+4b+c=0$　……③，$8a+4b+2c+d=5$　……④

④－②より　$7a+3b+c=-1$　……⑤

③－①より　$9a+2b=0$　　⑤－①より　$4a+b=-1$　　これらより　$a=2$，$b=-9$

このとき①より　$c=12$　　②より　$d=1$

よって　$f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

増減表は右図.

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $6$ | ↘ | $5$ | ↗ |

よって確かに $x=1$ で極大値 6，$x=2$ で極小値 5 をとり，条件を満たす.

したがって　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=-9}$，$\boldsymbol{c=12}$，$\boldsymbol{d=1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 33 ー 3**

(1)　関数 $f(x)=x^3-6x^2+6ax$ が極値をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

(2)　関数 $f(x)=x^3+ax^2+3(a-2)x+7$ が極値をもたないとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

(1)　$f(x)=x^3-6x^2+6ax$　より　$f'(x)=3x^2-12x+6a$

$f(x)$ が極値をもつ条件は，2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである．

$3x^2-12x+6a=0$　つまり　$x^2-4x+2a=0$ の判別式を $D$ とすると

$\frac{D}{4}=4-2a>0$　よって　$\boldsymbol{a<2}$

(2)　$f(x)=x^3+ax^2+3(a-2)x+7$ より　$f'(x)=3x^2+2ax+3(a-2)$

$f(x)$ が極値をもたない条件は，$f'(x)$ の符号が変わらないことであり，

それは 2 次方程式 $f'(x)=0$ が実数解を 1 つだけもつ，または実数解をもたないことである．

$3x^2+2ax+3(a-2)=0$ の判別式を $D$ とすると

$\frac{D}{4}=a^2-3\cdot3(a-2)\leqq0$　　$a^2-9a+18\leqq0$　　$(a-3)(a-6)\leqq0$

よって　$\boldsymbol{3\leqq a\leqq6}$

**類題 33 ー 3**

(1)　関数 $f(x)=x^3-3ax^2+ax+2$ が極値をもつような定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

(2)　関数 $f(x)=-x^3-ax^2-2x-3$ が単調に減少するような定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

(1)　$f(x)=x^3-3ax^2+ax+2$　より　$f'(x)=3x^2-6ax+a$

$f(x)$ が極値をもつ条件は，2 次方程式 $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである．

$3x^2-6ax+a=0$ の判別式を $D$ とすると

$\frac{D}{4}=9a^2-3a>0$

$a(3a-1)>0$　　よって　$\boldsymbol{a<0,\ \frac{1}{3}<a}$

(2)　$f(x)=-x^3-ax^2-2x-3$　より　$f'(x)=-3x^2-2ax-2$

$f(x)$ が単調に減少するための条件は，常に $f'(x)\leqq0$ が成り立つことであり，

$f'(x)$ の $x^2$ の係数は負より，2 次方程式 $f'(x)=0$ が実数解を 1 つだけもつ，または実数解をもたなければよい．

$-3x^2-2ax-2=0$　つまり　$3x^2+2ax+2=0$ の判別式を $D$ とすると

$\frac{D}{4}=a^2-6\leqq0$　　よって　$\boldsymbol{-\sqrt{6}\leqq a\leqq\sqrt{6}}$

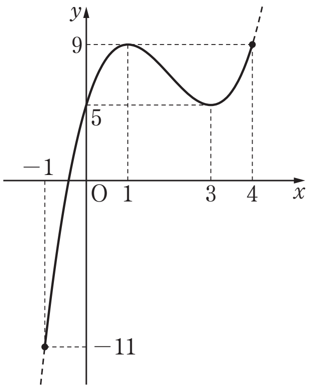
ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 33 ー 4**

関数 $y=x^3-6x^2+9x+5$ の区間 $-1 \leqq x \leqq 4$ における最大値と最小値を求めよ．




$y=x^3-6x^2+9x+5$　より　$y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$x=1,\ 3$ のとき　$y'=0$

よって　$-1 \leqq x \leqq 4$ における増減表は以下．

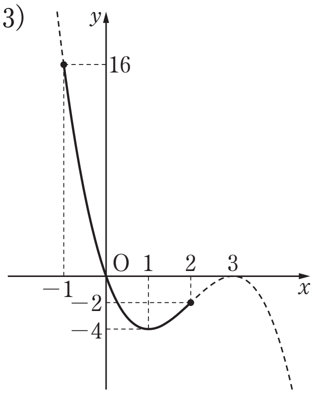
| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-11$ | ↗ | $9$ | ↘ | $5$ | ↗ | $9$ |

グラフは右図．

よって　**$x=1,\ 4$ で最大値 9　　$x=-1$ で最小値 $-11$**　をとる．

**類題 33 ー 4**

関数 $y=-x^3+6x^2-9x$ の区間 $-1 \leqq x \leqq 2$ における最大値と最小値を求めよ．




$y=-x^3+6x^2-9x$　より　$y'=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$x=1,\ 3$ のとき　$y'=0$

よって　$-1 \leqq x \leqq 2$ における増減表は以下．

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $16$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $-2$ |

グラフは右図．

よって　**$x=-1$ で最大値 16　$x=1$ で最小値 $-4$**　をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 33 講　微分法(2)

(1)　関数 $y=-x^3+6x^2-9x+2$ は $x=$ ア のとき極小値 $-$ イ，$x=$ ウ のとき極大値 エ をとる.

(2)　関数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+2$ が $x=1$ で極値 1 をとるとき，$b=-$ オ，$c=-$ カ である.

(3)　関数 $f(x)=x^3-3ax^2+3ax+1$ が単調に増加するような定数 $a$ の値の範囲は キ $\leqq a \leqq$ ク である.

(4)　関数 $f(x)=x^3-3x^2+4$ の区間 $-2\leqq x\leqq 2$ における最大値は ケ，最小値は $-$ コサ である.

**解答例**

(1)　$y=-x^3+6x^2-9x+2$　より

$y'=-3x^2+12x-9=-3(x^2-4x+3)=-3(x-1)(x-3)$

$x=1,\ 3$ のとき　$y'=0$　　よって増減表は右図.

したがって　$x=\mathbf{1}$ のとき極小値 $\mathbf{-2}$,

$x=\mathbf{3}$ のとき極大値 $\mathbf{2}$ をとる.

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $y$ | ↘ | $-2$ | ↗ | 2 | ↘ |

(2)　$f(x)=x^3+bx^2+cx+2$　より　$f'(x)=3x^2+2bx+c$

$x=1$ で極値 1 をとるとき　$f'(1)=3+2b+c=0$，$f(1)=1+b+c+2=1$

よって　$b=-1$，$c=-1$

このとき　$f(x)=x^3-x^2-x+2$

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$　　増減表は右図.

よって確かに $x=1$ のとき極値 1 をとる.

ゆえに　$b=\mathbf{-1}$，$c=\mathbf{-1}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{3}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | ↗ | $\frac{59}{27}$ | ↘ | 1 | ↗ |

(3)　$f(x)=x^3-3ax^2+3ax+1$　より　$f'(x)=3x^2-6ax+3a$

$f(x)$ が単調に増加するための条件は，常に $f'(x)\geqq 0$ が成り立つことであり，

$f'(x)$ の $x^2$ の係数は正より，2 次方程式 $f'(x)=0$ が実数解を 1 つだけもつ，または実数解をもたなければよい.

$3x^2-6ax+3a=0$　つまり　$x^2-2ax+a=0$ の判別式を $D$ とすると

$\frac{D}{4}=a^2-a\leqq 0$　　$a(a-1)\leqq 0$　　よって　$\mathbf{0}\leqq a\leqq \mathbf{1}$

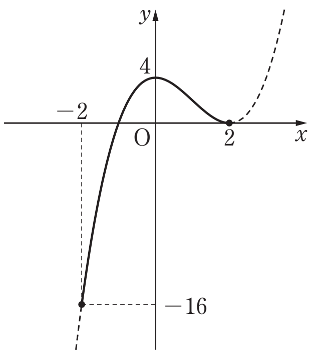
(4)　$f(x)=x^3-3x^2+4$　より　$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$x=0,\ 2$ のとき　$f'(x)=0$

$-2\leqq x\leqq 2$ におけるグラフは右図.

よって　最大値　$f(0)=\mathbf{4}$

最小値　$f(-2)=\mathbf{-16}$




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。